2016年度大学院春季試験問題（計量経済学）解答

問１　（各９点、計45点）

(1) $Y_i = \mathit{\Delta} P_i$、$X_i = 1/U_i$と定義して、$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$を最小二乗法で推定することで最小二乗推定量$\hat{\alpha}$と$\hat{\beta}$が得られる。

(2) 残差二乗和を$\tilde{\alpha}$と$\tilde{\beta}$に関して微分してゼロと置くと、

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i}{\partial \tilde{\alpha}} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i}{\partial \tilde{\beta}} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i\right)X_i = 0$$

が得られる。それぞれの式の両辺を-2で割ると、正規方程式

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i\right)X_i = 0$$

となる。

(3) (2)の正規方程式の１つ目の式より$\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$であるから、両辺を$n$で割って整理すると最小二乗推定量$\hat{\alpha}$が得られる。

(4) (2)の正規方程式の２つ目の式より$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$となるが、この式に(3)で求めた$\hat{\alpha}$を代入すると、$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - (\bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X})\sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$となる。これを$\hat{\beta}$について解くと最小二乗推定量$\hat{\beta}$が得られる。

(5) (4)の分子は、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} X_i(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^{N} X_i(Y_i - \bar{Y}) - \bar{X}\sum_{i=1}^{n} Y_i + \bar{X}\sum_{i=1}^{n} Y_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} X_i(Y_i - \bar{Y}) - \bar{X}\sum_{i=1}^{n} Y_i + \bar{X}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} X_i(Y_i - \bar{Y}) - \bar{X}\sum_{i=1}^{n} Y_i + \bar{X}n\bar{Y} \\
&= \sum_{i=1}^{N} X_i(Y_i - \bar{Y}) - \sum_{i=1}^{n} \bar{X}(Y_i - \bar{Y}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})
\end{aligned}$$

となる。分母も同様に、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} X_i(X_i-\bar{X}) &= \sum_{i=1}^{N} X_i(X_i-\bar{X}) - \bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} X_i(X_i-\bar{X}) - \bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \bar{X}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} X_i(X_i-\bar{X}) - \bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \bar{X}n\bar{X} \\ &= \sum_{i=1}^{N} X_i(X_i-\bar{X}) - \sum_{i=1}^{n} \bar{X}(X_i-\bar{X}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (X_i-\bar{X})^2\end{aligned}$$

となる。よって、(5)の式が導出できる。

問２　（計 25 点）

(1) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2} = \frac{(2-2)(4-8)+\cdots+(1-2)(6-8)}{(2-2)^2+\cdots+(1-2)^2} = \frac{4}{2} = 2$　（８点）

(2) $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = 8 - 2 \times 2 = 4$　（７点）

(3) $R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\bar{Y})^2} = \frac{(4+2\times2-8)^2+\cdots+(4+2\times1-8)^2}{(4-8)^2+\cdots+(6-8)^2} = \frac{8}{40} = 0.2$　（10 点）

問３　（計 30 点）

(1) $t_\alpha = \frac{14.1}{4.7} = 3,\ t_{\beta_1} = -\frac{0.2}{2.0} = -0.1,\ t_{\beta_2} = \frac{2.4}{0.8} = 3.$　（各３点、計９点）

(2) $\widehat{rice}_i = 14.1 - 0.2 \times 3 + 2.4 \times 1 = 15.9$（千円）　（６点）

(3) 様々な説明変数が考えられるので、例を挙げる。（変数 5 点＋理由 10 点＝計 15 点）

- 日照時間：適切な日照時間があることで米の品質は高まるものと考えられるため。
- 生産量：生産量が多い銘柄ほど価格は低くなると考えられるため。
- 地域ダミー変数：新潟県以外にも秋田県、山形県などブランド米のある都道府県があり、米価が高くなっていると考えられるため、有名ブランド米のある都道府県ならば１、そうでなければ０とするダミー変数が必要
- 等々。