2025 年度秋季　計量経済学　模範解答

問題 1

モデル：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

最小二乗法は残差平方和

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

を最小化する $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$を求める方法である。
一階条件（偏微分＝0）：

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{N} X_i (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0$$

（8 点）

第 1 式より

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i = N\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i$$

したがって

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

（$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i, \bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$）
これを第 2 式に代入して整理すると

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2$$

よって

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

となる。

（7 点）

問題 2

望ましい推定量の性質:

・不偏性：$E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$（推定量の期待値が推定対象の真の値に等しいという性質）

・一致性：$\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1$（一致性は、データ数$N$が大きくなるとともに推定量$\hat{\beta}_1$が真の値$\beta_1$に近い値を取る確率が 1 に近づくということ）

・効率性：線形不偏推定量の中で分散が最小である性質（BLUE）

（7 点）

線形単回帰の場合に必要な仮定：

- ランダムサンプリング（i.i.d.）
- 外生性 $E[u_i \mid X_i] = 0$
- $E[X_i^2] < \infty, E[u_i^2] < \infty$
- $\mathrm{Var}(X_i) > 0$

（7 点）

一致性の証明：

OLS 推定量は

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})u_i}{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}$$

よって

$$\hat{\beta}_1 - \beta_1 = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})u_i}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}$$

分子は

$$\frac{1}{N}\Sigma(X_i - \bar{X})u_i = \frac{1}{N}\Sigma X_i u_i - \bar{X}\frac{1}{N}\Sigma u_i$$

外生性 $E[u_i \mid X_i] = 0$より

$E[X_i u_i] = 0,\ E[u_i] = 0$。

大数の法則より

$$\frac{1}{N}\sum X_i u_i \xrightarrow{p} 0, \frac{1}{N}\sum u_i \xrightarrow{p} 0, \bar{X} \xrightarrow{p} E[X]$$

したがって分子

$$\frac{1}{N}\sum (X_i - \bar{X})u_i \xrightarrow{p} 0$$

分母は

$$\frac{1}{N}\sum (X_i - \bar{X})^2 \xrightarrow{p} Var(X_i) > 0$$

ゆえに Slutsky の定理より

$$\hat{\beta}_1 - \beta_1 \xrightarrow{p} 0$$

したがって

$$\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1$$

よって OLS 推定量は一致性をもつ。

（6 点）

問題 3

- モデル A：$\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$
  - βは 弾力性。
    Xが 1%増えると、Y は約 β% 変化。

（5 点）

- モデル B：$Y = \alpha + \beta \ln X + u$
  - βは 準弾力性。
    Xが 1%増えると、Y は約 0.01βだけ増減（単位は Yの単位)。

（5 点）

問題 4

決定係数 R^2は、被説明変数の変動のうち回帰モデルによって説明された割合を示す指標であり、説明変数を追加すると値は減少せず、一般に上昇する。
これに対し、自由度修正済み決定係数（adjusted R^2）は、説明変数の数と標本サイズを考慮して R^2を補正した指標である。不要な説明変数を追加した場合には値が低下することがあり、モデルの適合度をより適切に評価するために用いられる。

（5 点）

問題 5

① αのt値

$$t_\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{\mathrm{SE}(\hat{\alpha})} = \frac{16579.719}{3716.077} \approx 4.462$$

（5 点）

② βのt値

$$t_\beta = \frac{0.527}{0.008} = 65.875$$

（5 点）

③ βの 95%信頼区間

自由度 26 の両側 5%：$t_{0.975,26} \approx 2.056$（$t$表）

$$\hat{\beta} \pm t_{0.975,26} \cdot \mathrm{SE}(\hat{\beta}) = 0.527 \pm 2.056 \times 0.008 = 0.527 \pm 0.016448$$

⇒ *(0.5106, 0.5434)*

（10 点）

問題 6

係数 α_3が有意でないとは、年齢・勤続年数を一定にしたとき、
「高卒以下（=1)」と「それ以外（=0)」の平均賃金差（α_3）が 0 であるという帰無仮説を棄却できないことを意味する。したがって、この推定では、学歴による賃金差が統計的に有意であるとは言えない。

（5 点）

問題7

① $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$の解釈

距離の限界効果（距離を 1m 増やしたときの地価変化）は

$$\frac{\partial \text{地価}}{\partial \text{距離}} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \text{距離}$$

$\alpha_1 < 0$なので駅から遠いほど地価は下がる。さらに $\alpha_2 < 0$なので距離が大きいほど $2\alpha_2$距離はより負になり、地価の下落幅（限界的な下落）が距離とともに大きくなる。つまり、駅から離れるほど地価は下がり、その下がり方は加速度的に強くなる。

（10 点）

② $\alpha_5 < 0$の意味

容積率の限界効果は

- 非住居地（$D = 0$）：α_3
- 住居地（$D = 1$）：$\alpha_3 + \alpha_5$

$\alpha_5 < 0$なので、住居地では容積率が地価に与える効果が非住居地より小さい。

（5 点）

③ 追加の説明変数を 2 つ（理由を含む）

- 治安（犯罪発生率など）：治安が良い地域ほど居住の効用が高まり住宅需要が増加するため、地価を押し上げると考えられる。
- 学区・学校の質（人気学区ダミーなど）：教育環境の良い地域では居住需要が高まり、その需要増加を通じて地価を押し上げると考えられる。

（10 点）